WYMAGANIA EDUKACYJNE Z MATEMATYKI

(zakres podstawowy i rozszerzony)

klasa 1a

Wstęp

Plan wynikowy kształcenia matematycznego jest dostosowany do programu nauczania matematyki w liceach i technikach – zakres podstawowy i rozszerzony, autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab i Elżbiety Świdy, zamieszczonego na stronie internetowej www.pazdro.com.pl wiosną 2012 roku. Jest on przeznaczony dla nauczycieli oraz uczniów pracujących z podręcznikiem „Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Zakres podstawowy i rozszerzony" – numer ewidencyjny w wykazie podręczników: 563/1/2012 oraz zbiorami zadań do matematyki, autorstwa Elżbiety Kurczab, Marcina Kurczaba i Elżbiety Świdy, wydanymi przez Oficynę Edukacyjną * Krzysztof Pazdro.

Plan jest wykazem wiadomości i umiejętności, jakie powinien mieć uczeń ubiegający się o określone oceny na poszczególnych etapach edukacji w liceum lub w technikum.

Wymagania stawiane przed uczniem podzieliliśmy na trzy grupy:

- Wymagania podstawowe (zawierają wymagania konieczne);
- Wymagania dopełniające (zawierają wymagania rozszerzające);
- Wymagania wykraczające.

Wymagania wykraczające zawierają w sobie wymagania dopełniające, te zaś zawierają wymagania podstawowe.
<u>Ocenę dopuszczającą</u> powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące 40–60% wymagań podstawowych, zaś <u>ocenę dostateczną</u> uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 60 % wymagań podstawowych.

Ocenę dobrą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące do 75% wymagań dopełniających, zaś ocenę bardzo dobrą uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 75% wymagań dopełniających.
Ocenę celującą powinien uzyskać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności zawarte w wymaganiach wykraczających.
Tematy, które mogą nie być realizowane w zakresie podstawowym, zostały oznaczone symbolem **(R)**.

Aby ułatwić nauczycielom, uczniom i ich rodzicom korzystanie z planu wynikowego, dla poszczególnych wymagań przedstawiamy przykładowe zadania, które dokładniej określają stopień trudności problemów wymaganych na poszczególne oceny. Przedstawione zadania **nie mogą** w żadnym wypadku stanowić przykładowego zbioru zadań, z którego nauczyciel powinien czerpać zadania na ewentualny egzamin sprawdzający, lecz mają jedynie wskazać stopień trudności zadań na poszczególne oceny.
Plan wynikowy nie może być „dokumentem sztywnym”. Zakładamy, że każdy nauczyciel zmodyfikuje ten plan, dostosowując go zarówno do liczby godzin przeznaczonych na realizację materiału, jak i do możliwości uczniów.

Spis treści

1. Wprowadzenie do matematyki. Pojęcia podstawowe

Tematyka zajęć:

- Zdanie. Zaprzeczenie zdania
- Koniunkcja zdań. Alternatywa zdań
- Implikacja. Równoważność zdań. Definicja. Twierdzenie
- Prawa logiczne. Prawa De Morgana
- Zbiór. Działania na zbiorach
- Zbiory liczbowe. Oś liczbowa
- Rozwiązywanie prostych równań
- Przedziały
- Rozwiązywanie prostych nierówności
- Zdanie z kwantyfikatorem

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić zdanie logiczne od innej wypowiedzi; – umie określić wartość logiczną zdania prostego; – potrafi zanegować zdanie proste i określić wartość logiczną zdania zanegowanego; – potrafi rozpoznać zdania w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań; – potrafi zbudować zdania złożone w postaci koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności zdań z danych zdań prostych; – potrafi określić wartości logiczne zdań złożonych, takich jak koniunkcja, alternatywa, implikacja i równoważność zdań; – potrafi odróżnić definicję od twierdzenia; – zna prawa De Morgana (prawo negacji alternatywy oraz prawo negacji koniunkcji)	Uczeń: – potrafi budować zdania złożone i oceniać ich wartości logiczne; – potrafi wnioskować o wartościach zdań składowych wybranych zdań złożonych na podstawie informacji o wartościach logicznych zdań złożonych; – zna prawo negacji implikacji i potrafi je stosować w praktyce; – potrafi , na podstawie implikacji prostej, utworzyć implikację odwrotną, przeciwną oraz przeciwstawną; – wie, że równoważne są implikacje: prosta i przeciwstawna oraz odwrotna i przeciwna; – potrafi negować zdania złożone; – rozumie budowę twierdzenia matematycz-nego; potrafi wskazać jego założenie i tezę; – potrafi zbudować twierdzenie odwrotne do	Uczeń: – potrafi stosować wiadomości z logiki do wnioskowania matematycznego; – potrafi stosować działania na zbiorach do wnioskowania na temat własności tych zbiorów; – potrafi określić dziedzinę i zbiór elementów spełniających równanie z jedną niewiadomą, zawierające wyrażenia wymierne lub pierwiastek stopnia drugiego.

i potrafi je stosować; – potrafi określić wartość logiczną zdania, które jest negacją koniunkcji, oraz zdania, które jest negacją alternatywy zdań prostych; – zna takie pojęcia, jak: zbiór pusty, zbiory równe, podzbiór zbioru; – zna symbolikę matematyczną dotyczącą zbiorów ($\in$, $\notin$, $\cup$, $\cap$, $-$, $\subset$, $\not\subset$); – potrafi podać przykłady zbiorów (w tym przykłady zbiorów skończonych oraz nieskończonych); – potrafi określić relację pomiędzy elementem i zbiorem; – potrafi określać relacje pomiędzy zbiorami (równość zbiorów, zawieranie się zbiorów, rozłączność zbiorów); – zna definicję sumy, iloczynu, różnicy zbiorów; – potrafi wyznaczać sumę, iloczyn i różnicę zbiorów skończonych; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych: ***N***, ***C***, ***NW***, ***W***; – potrafi rozróżniać liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne; – potrafi przedstawić liczbę wymierną w postaci ułamka zwykłego i w postaci rozwinięcia dziesiętnego; – umie zamienić ułamek o rozwinięciu dziesiętnym nieskończonym okresowym na ułamek zwykły; – potrafi zaznaczać liczby wymierne na osi liczbowej; – rozumie pojęcie przedziału, rozpoznaje przedziały ograniczone i nieograniczone;	danego oraz ocenić prawdziwość twierdzenia prostego i odwrotnego; – potrafi sprawnie posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów; – potrafi podać przykłady zbiorów A i B, jeśli dana jest suma $A \cup B$, iloczyn $A \cap B$ albo różnica $A - B$; – zna pojęcie dopełnienia zbioru i potrafi zastosować je w działaniach na zbiorach; – potrafi wyznaczyć dopełnienie przedziału lub dopełnienie zbioru liczbowego skończonego w przestrzeni ***R***; – potrafi przeprowadzić proste dowody, w tym dowody „nie wprost”, dotyczące własności liczb rzeczywistych; – potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy podzbiorami zbioru ***R***; – potrafi wyznaczyć dziedzinę równania z jedną niewiadomą, w przypadku, gdy trzeba rozwiązać koniunkcję warunków; – potrafi podać przykład równania sprzecznego oraz równania tożsamościowego; – potrafi wskazać przykład nierówności sprzecznej oraz nierówności tożsamościowej; – rozumie zwrot „dla każdego *x* ....” oraz „istnieje takie *x*, że ....” i potrafi stosować te zwroty w budowaniu zdań logicznych; – potrafi zapisać symbolicznie zadnie z kwantyfikatorem; – potrafi ocenić wartość logiczną zdania z kwantyfikatorem; – zna prawa De Morgana dla zdań z kwantyfikatorem;	

– potrafi zapisać za pomocą przedziałów zbiory opisane nierównościami; – potrafi zaznaczyć na osi liczbowej podany przedział liczbowy; – potrafi wyznaczyć sumę, różnicę oraz część wspólną przedziałów; – wie , co to jest równanie (nierówność) z jedną niewiadomą; – potrafi określić dziedzinę równania; – zna definicję rozwiązania równania (nierówności) z jedną niewiadomą; – wie, jakie równanie nazywamy równaniem sprzecznym, a jakie równaniem tożsamościowym; – wie, jaką nierówność nazywamy sprzeczną, a jaką nierównością tożsamościową.	– potrafi zanegować zdanie z kwantyfikatorem i podać wartość logiczną zdania po negacji.	

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Wśród poniższych wypowiedzi znajdują się zdania logiczne. Wskaż je. Oceń wartości logiczne zdań. 1) Wyjdź do ogrodu! 2) Czy dzisiaj jest klasówka z matematyki? 3) Liczba 3 jest większa od liczby 8. 4) Liczba *a* jest liczbą parzystą. 5) Warszawa jest stolicą Polski. <u>Zadanie 2.</u> Dane jest zdanie: „2 jest liczbą parzystą i liczba 5 nie jest podzielna przez 3”. a) Oceń wartość logiczną zdania. b) Napisz zaprzeczenie zdania; podaj prawo	<u>Zadanie 1.</u> Wiadomo, że poniższe zdania złożone są fałszywe. Co można powiedzieć o zdaniach prostych tworzących dane zdania? a) Ania poszła do Kasi lub Ania poszła do Oli. b) Jeśli Bartek będzie grał w gry komputerowe, to nie pójdzie do kina. <u>Zadanie 2.</u> Napisz negację zdania: a) Pojadę na wieś lub zostanę w domu i posprzątam swój pokój. b) Nie wyjdę z domu i obejrzę film lub poczytam książkę. c) Jeśli zdam dobrze maturę z matematyki, to	<u>Zadanie 1.</u> Na pytanie, który z trzech studentów studiował logikę otrzymano następującą odpowiedź: *„Jeśli studiował Marek, to studiował też Wacek i nieprawdą jest, że jeśli studiował Tomek, to studiował Wacek”* Który z chłopców studiował logikę? <u>Zadanie 2.</u> Co można powiedzieć o zbiorach *A* i *B*, jeśli: a) $A \cap B = B$; b) $A \cup B \subset A$; c) $A - B = A \cap B$? <u>Zadanie 3.</u> Podaj przykład równania z jedną niewiadomą, którego dziedziną jest zbiór:

logiczne, z którego skorzystałeś. Zadanie 3. Oceń wartość logiczną zdań: a) $-3^2 = 9$ b) $1^3 - 2^3 \neq (-1)^3$ c) $3 \cdot (1 - 8) \leq -3 \cdot (8 - 1)$ Zadanie 4. a) Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $C \cap D$, $A - C$, jeśli: $A = \{-3, -2, -1, 3, 4\}$, $B = \{-2, 0, 1, 3\}$, $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. b) Wykonaj działania na zbiorach: $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{W} \cup \boldsymbol{NW}$, $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{R}$. c) Wykonaj działania na przedziałach: $(2, 5) \cup \langle 3, 8\rangle$; $(-\infty, 3) - (0, 9\rangle$; $(-7, 8\rangle \cap \langle -7, +\infty)$. Zadanie 5. Przedstaw liczbę 2,3(04) w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Czy dana liczba jest wymierna czy niewymierna? Zadanie 6. Dane jest równanie z niewiadomą x: $x - \sqrt{3} = 3$. a) Podaj dziedzinę tego równania. b) Jaka liczba spełnia to równanie?	dostanę się na studia i zostanę inżynierem. Zadanie 3. Oceń wartość logiczną danego twierdzenia. Następnie sformułuj twierdzenie odwrotne do danego i określ, czy jest ono fałszywe, czy prawdziwe. a) Jeśli liczba całkowita jest podzielna przez 3 i przez 7, to liczba ta jest podzielna przez 21. b) Jeśli liczba naturalna jest podzielna przez 3 i przez 6, to liczba ta jest podzielna przez 18. Zadanie 4. Zbiór $A \cup B$ ma 7 elementów, zbiór B ma 4 elementy, zaś zbiór A ma 5 elementów. Ile elementów ma zbiór $A \cap B$? Zadanie 5. Wiedząc, że π jest liczbą niewymierną wykaż, że liczba $2\pi - 1$ też jest liczbą niewymierną. Zadanie 6. a) Wyznacz zbiory: $(-3, 2\rangle \cap \boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{C} - (5, +\infty)$; $\boldsymbol{C}_+ \cup \langle 4, +\infty)$; $(2, 5) - \boldsymbol{N}$. b) Znajdź dopełnienie danego zbioru w przestrzeni $\boldsymbol{R}$: $A = \langle -7, +\infty)$; $B = \{-4, 3, 5\}$, $C = (2, 8) \cup \{0\}$. Zadanie 7. Podaj przykład równania: a) którego zbiór rozwiązań jest jednoelementowy; b) którego zbiór rozwiązań jest dwuelementowy;	a) $\boldsymbol{R} - \{-3, 0\}$ i które ma tylko dwa rozwiązania: 2, 3; b) $\langle 2, +\infty)$ i które ma tylko jedno rozwiązanie 2. Zadanie 4. Określ wartość logiczną zdania i podaj jego zaprzeczenie: a) $\bigwedge_{x \in \boldsymbol{N}} (x + 2 > 0 \wedge x < 1000)$ b) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{C}_+} \left(\frac{x}{2} > 1 \vee x \leq 0 \right)$. Zadanie 5. Przedstaw na osi liczbowej zbiór tych liczb rzeczywistych, które spełniają implikację $(x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x < 2$.

	c) które jest sprzeczne; d) które jest tożsamościowe. <u>Zadanie 8.</u> Oceń wartość logiczną zdania: $\bigwedge_{x\in \boldsymbol{R}} x^2 > 0$. Napisz zaprzeczenie tego zdania.	

2. Działania w zbiorach liczbowych

Tematyka zajęć:
- Zbiór liczb naturalnych
- Zbiór liczb całkowitych
- Zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych
- Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych
- Rozwiązywanie równań – metoda równań równoważnych
- Rozwiązywanie nierówności – metoda nierówności równoważnych
- Procenty
- Punkty procentowe
- Wartość bezwzględna. Proste równania i nierówności z wartością bezwzględną
- **(R) Własności wartości bezwzględnej**
- Przybliżenia, błąd bezwzględny i błąd względny, szacowanie

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi wskazać liczby pierwsze i liczby złożone; – zna i potrafi stosować cechy podzielności liczb naturalnych (przez 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10); – potrafi rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze; – potrafi wyznaczyć największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb	Uczeń: – zna definicję liczb względnie pierwszych; – zna i stosuje w obliczeniach zależność dotyczącą liczb naturalnych różnych od zera: $NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = a \cdot b$; – potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb całkowitych ujemnych; – potrafi podać zapis symboliczny wybranych	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące własności liczb rzeczywistych; – potrafi zbadać liczbę rozwiązań równania typu $\|x - a\| + \|b - x\| = m$, gdzie a i b są danymi liczbami, zaś m – jest parametrem.

naturalnych; – potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb naturalnych; – zna definicję liczby całkowitej parzystej oraz nieparzystej; – potrafi sprawnie wykonywać działania na ułamkach zwykłych i na ułamkach dziesiętnych; – zna i stosuje w obliczeniach kolejność działań i prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych; – potrafi porównywać liczby rzeczywiste; – zna własność proporcji i potrafi stosować ją do rozwiązywania równań zawierających proporcje; – zna twierdzenia pozwalające przekształcać w sposób równoważny równania i nierówności; – potrafi rozwiązywać równania z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych; – potrafi rozwiązywać nierówności z jedną niewiadomą metodą nierówności równoważnych; – potrafi obliczyć procent danej liczby, a także wyznaczyć liczbę, gdy dany jest jej procent; – potrafi obliczyć, jakim procentem danej liczby jest druga dana liczba; – potrafi określić, o ile procent dana wielkość jest większa (mniejsza) od innej wielkości; – potrafi posługiwać się procentem w prostych zadaniach tekstowych (w tym wzrosty i spadki cen, podatki, kredyty i lokaty); – rozumie pojęcie punktu procentowego i potrafi się nim posługiwać; – potrafi odczytywać dane w postaci tabel i diagramów, a także przedstawiać dane w postaci diagramów procentowych; – potrafi odczytywać dane przedstawione	liczb, np. liczby parzystej, liczby nieparzystej, liczby podzielnej przez daną liczbę całkowitą, wielokrotności danej liczby; zapis liczby, która w wyniku dzielenia przez daną liczbę całkowitą daje wskazaną resztę; – potrafi zapisać symbolicznie zbiór na podstawie informacji o jego elementach; – potrafi wymienić elementy zbioru zapisanego symbolicznie; – potrafi wykazać podzielność liczb całkowitych, zapisanych symbolicznie; – umie podać część całkowitą każdej liczby rzeczywistej i część ułamkową liczby wymiernej; – wie, kiedy dwa równania (dwie nierówności) są równoważne i potrafi wskazać równania (nierówności) równoważne; – potrafi rozwiązać proste równania wymierne typu $\frac{2}{x+7}=\frac{1}{4}$; $\frac{x-5}{x-2}=0$; – rozumie zmiany bankowych stóp procentowych i umie wyrażać je w punktach procentowych (oraz bazowych); – potrafi zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności z wartością bezwzględną typu: $\|x-a\|=b$, $\|x-a\|<b$, $\|x-a\|>b$, $\|x-a\|\le b$, $\|x-a\|\ge b$; – potrafi na podstawie zbioru rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną zapisać tę nierówność; – zna własności wartości bezwzględnej i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi oszacować wartość liczby niewymiernej.	

w tabeli lub na diagramie i przeprowadzać analizę procentową przedstawionych danych; – zna definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej i jej interpretację geometryczną; – potrafi obliczyć wartość bezwzględną liczby; – umie zapisać i obliczyć odległość na osi liczbowej między dwoma dowolnymi punktami; – potrafi wyznaczyć przybliżenie dziesiętne liczby rzeczywistej z żądaną dokładnością; – potrafi obliczyć błąd bezwzględny i błąd względny danego przybliżenia; – potrafi obliczyć błąd procentowy przybliżenia; – potrafi szacować wartości wyrażeń.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Bartek i Jurek postanowili zmierzyć odległość namiotu od przystani za pomocą swoich kroków. Bartek stawia kroki o długości 48 cm, natomiast Jurek o długości 56 cm. W jakiej odległości od namiotu znajduje się przystań, jeśli ślady stóp chłopców pokryły się 15 razy? Wynik wyraź w metrach. Zadanie 2. Znajdź liczbę wymierną, która znajduje się na osi liczbowej między liczbami: a) $\frac{1}{8}$ i $\frac{1}{6}$ b) $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{7}$ c) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ Zadanie 3. a) Rozwiąż nierówność: $\frac{x-2}{3}-\frac{x+5}{2}>5-x$.	Zadanie 1. Wyznacz zbiory $(A \cap B) - D$, $A \cup B$, $(A - B) - D$, jeśli: $A = \{x: x \in \boldsymbol{C}$ i $x \in \langle -3, 4)\}$, $B = (-1, 2\rangle$, $D = \{x : x \in \boldsymbol{R}$ i $\|x - 2\| = 4\}$ Zadanie 2. Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3. Zadanie 3. Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, rozwiąż równanie: $\|x + 3{,}5\| = 5$. a) Podaj najmniejszą liczbę pierwszą, która jest większa od rozwiązań tego równania. b) Wyznacz odwrotność liczby $\frac{\|a-b\|}{4}$, gdzie a, b są rozwiązaniami danego równania.	Zadanie 1. Iloczyn dwóch liczb naturalnych dodatnich wynosi 1728, a największy ich wspólny dzielnik równa się 24. Znajdź te liczby. Zadanie 2. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych, spełniających równanie: $x \cdot y - 2y = 5 - x$. Zadanie 3. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze a i b, które spełniają warunek: $a^2 - 1 = 2b^2$. Zadanie 4. Zbadaj liczbę rozwiązań równania $\|x - 6\| + \|1 + x\| = m$ ze względu na wartość parametru m.

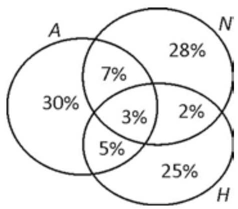
b) Podaj najmniejszą liczbę pierwszą spełniającą tę nierówność.

Zadanie 4.

Jabłka zdrożały o 20% i wówczas cena jednego kilograma jabłek wynosiła 4,80 zł. O ile procent cena jabłek przed podwyżką była niższa niż po podwyżce?

Zadanie 5.

Uczestnicy obozu językowego posługiwali się trzema językami obcymi: angielskim (*A*), hiszpańskim (*H*) i niemieckim (*N*), zgodnie z następującym podziałem procentowym:



a) Jaki procent wszystkich uczestników obozu znało język angielski?
b) Jaki procent osób znających język niemiecki znało również pozostałe dwa języki?
c) O ile punktów procentowych więcej było na obozie osób ze znajomością tylko języka angielskiego od osób, które znały tylko język hiszpański?
d) O ile procent mniej było na obozie uczniów, którzy znali tylko język hiszpański od uczniów, którzy znali język angielski lub niemiecki?

Zadanie 4.

a) Oblicz: $|2 - 3\sqrt{3}|$
b) Rozwiąż nierówność: $\sqrt{x^2+6x+9} \geq 4$
c) Przedział liczbowy $(-5, 7)$ jest zbiorem rozwiązań pewnej nierówności z wartością bezwzględną. Zapisz tę nierówność.

Zadanie 5.

Wykaż, że reszta z dzielenia przez 3 sumy kwadratów trzech dowolnych kolejnych liczb całkowitych wynosi 2.

Zadanie 6.

Rozwiąż:
a) równanie $|x + 1| + |x^2 - 1| = 0$
b) nierówność $|2 - x| + |x \cdot (x - 2)| \leq 0$.

Zadanie 7.

Sprawdź (nie używając kalkulatora), czy liczba $\frac{2\sqrt{5}-1}{5}$ należy do przedziału $\left(\frac{3}{5},\ 1\right)$.

Zadanie 6. a) Porównaj liczby: $a = \lvert \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 \rvert$ oraz $b = \lvert -1{,}5 \rvert$. b) Oblicz odległość między liczbami –6 i 12. c) Rozwiąż równanie $\lvert x \rvert=3$ i nierówność $\lvert x \rvert<5$. Zadanie 7. Na zawodach w skokach narciarskich komentator sportowy ocenił pierwszy skok zawodnika na 122 m, podczas gdy skoczek osiągnął długość skoku równą 124,5 m. Drugi skok miał długość 123,5 m, zaś komentator ocenił go na 126 m. W którym przypadku komentator popełnił większy błąd?		

3. Wyrażenia algebraiczne

Tematyka zajęć:

- Potęga o wykładniku naturalnym
- Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej
- Działania na wyrażeniach algebraicznych
- Wzory skróconego mnożenia, cz.1
- **(R) Wzory skróconego mnożenia, cz.2**
- Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym
- Potęga o wykładniku wymiernym
- Potęga o wykładniku rzeczywistym
- Dowodzenie twierdzeń
- Określenie logarytmu
- **(R) Zastosowanie logarytmów**
- Przekształcanie wzorów
- Średnie

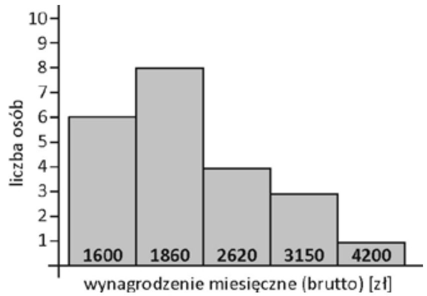
Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi wykonywać działania na potęgach o wykładniku naturalnym, całkowitym i wymiernym; – zna prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i stosuje je w obliczeniach; – potrafi zapisać liczbę w notacji wykładniczej; – sprawnie sprowadza wyrażenia algebraiczne do najprostszej postaci i oblicza ich wartości dla podanych wartości zmiennych; – potrafi wyłączać wspólny czynnik z różnych wyrażeń; – potrafi sprawnie posługiwać się wzorami skróconego mnożenia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ i sprawnie wykonuje działania na wyrażeniach, które zawierają wymienione wzory skróconego mnożenia; – potrafi usuwać niewymierność z mianownika ułamka, stosując wzór skróconego mnożenia (różnicę kwadratów dwóch wyrażeń); – zna pojęcie pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej i potrafi stosować prawa działań na pierwiastkach w obliczeniach; – potrafi obliczać pierwiastki stopnia nieparzystego z liczb ujemnych; – potrafi dowodzić proste twierdzenia; – zna definicję logarytmu i potrafi obliczać logarytmy bezpośrednio z definicji; – sprawnie przekształca wzory matematyczne, fizyczne i chemiczne;	Uczeń: – zna następujące wzory skróconego mnożenia: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$; – sprawnie przekształca wyrażenia zawierające powyższe wzory skróconego mnożenia; – potrafi usunąć niewymierność z mianownika ułamka, stosując wzór skróconego mnożenia na sumę (różnicę sześcianów) – sprawnie przekształca wyrażenia algebraiczne zawierające potęgi i pierwiastki; – sprawnie zamienia pierwiastki arytmetyczne na potęgi o wykładniku wymiernym i odwrotnie; – sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym; – potrafi wyłączać wspólną potęgę poza nawias; – potrafi rozłożyć wyrażenia na czynniki metodą grupowania wyrazów lub za pomocą wzorów skróconego mnożenia; – potrafi oszacować wartość potęgi o wykładniku rzeczywistym; – potrafi dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem wprost; – potrafi dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem nie wprost; – zna i potrafi stosować własności logarytmów w obliczeniach; – stosuje średnią arytmetyczną, średnią ważoną i średnią geometryczną w zadaniach tekstowych.	– Uczeń: – potrafi sprawnie działać na wyrażeniach zawierających potęgi i pierwiastki z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia; – potrafi sprawnie rozkładać wyrażenia zawierające potęgi i pierwiastki na czynniki, stosując jednocześnie wzory skróconego mnożenia i metodę grupowania wyrazów; – potrafi wykorzystać pojęcie logarytmu (a także cechy i mantysy logarytmu dziesiętnego) w zadaniach praktycznych.

– zna pojęcie średniej arytmetycznej, średniej ważonej i średniej geometrycznej liczb oraz potrafi obliczyć te średnie dla podanych liczb.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia: $8^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{3^2+4^2}+\left(\frac{1}{9^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left(27^{-\frac{2}{3}}\right)+\sqrt[3]{-64}$ Zadanie 2. Usuń niewymierność z mianownika ułamka: a) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{8}-4}{2-\sqrt{2}}$ Zadanie 3. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias: a) $(a-b)-(a-b)^2$ b) $(b-a)xy+(a-b)xyz-(b-a)z^2$. Zadanie 4. Wykaż, że jeśli a i b są liczbami dodatnimi to $a+b\ge 2\sqrt{ab}$. Zadanie 5. Oblicz: $3\log(\log_2 32\cdot\log_5 25)$. Zadanie 6. Wyznacz podaną wielkość ze wzoru: a) $\frac{1}{f}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; f b) $P=2\pi r(r+h)$; h. Zadanie 7.	Zadanie 1. Sprowadź wyrażenie: $[y^3:(y^2\cdot y^{-3})]^4:\left[\left(\frac{1}{y}\right)^4\cdot\frac{1}{y^{-2}}\right]^{-3}$ do najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla $y=\sqrt{2\sqrt{2}}$. Zadanie 2. Oblicz wartość wyrażenia: $\left[\left(4-12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(4+12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$ Zadanie 3. Wykaż, że: a) liczba $6^{20}+3\cdot 6^{19}-4\cdot 6^{18}$ jest podzielna przez 5. b) liczba $5^{18}-1$ jest podzielna przez 31. Zadanie 4. Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{1}{9-3\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36}}$	Zadanie 1. Wykaż, że liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt[4]{4}$ jest całkowita. Zadanie 2. Rozłóż na czynniki wyrażenia: a) x^4+1 b) $x^5-5x^3-8x^2+40$. Zadanie 3. Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$ Zadanie 4. Wykaż, że jeśli liczby x, y, z są dodatnie i $x+y+z=1$ to $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$. Zadanie 5. Oblicz wartość pH kwasu solnego, wiedząc, że stężenie jonów wodorowych w tym kwasie jest równe 0,05 mol/dm^3. Wynik podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

Poniższy diagram przedstawia wynagrodzenie brutto pracowników pewnej firmy w tym miesiącu.



a) Oblicz średnie wynagrodzenie brutto w tej firmie.
b) Podaj, jaki procent pracowników zarabia więcej, niż wynosi średnie wynagrodzenie w tej firmie.
c) Od przyszłego miesiąca każdy pracownik ma zarabiać o 100 zł więcej, niż w tym miesiącu. Oblicz średni procent, o jaki planowany jest wzrost wynagrodzeń w tej firmie.
Wyniki podaj w przybliżeniu dziesiętnym, z dokładnością do 0,1%.

Zadanie 5.
Oblicz (bez użycia kalkulatora) przybliżoną wartość potęgi: $0{,}0001^{-\sqrt{5}}$, jeśli $\sqrt{5} \approx 2{,}25$

Zadanie 6.
Wykaż, że jeśli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 5$, to $a^4 + b^4 = 17$.

Zadanie 7.
Wykaż, stosując dowód nie wprost, że jeśli liczby a i b są dodatnie, to $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

Zadanie 8.
Wykaż, że jeśli $x + y = 6$, $x \in \boldsymbol{R}$ i $y \in \boldsymbol{R}$, to $x^2 + y^2 \geq 18$.

Zadanie 9.
Wykaż, że jeśli $a > 2$ i $b < 4$, to $\frac{ab}{2} + 4 < b + 2a$.

Zadanie 10.
Niech $\log 2 = a$ i $\log 3 = b$. Wyraź za pomocą a i b wyrażenie: $\log 8 \cdot \log_8 6$.

Zadanie 11.
Na wycieczkę w góry pojechało 21 osób o średniej wieku 23 lata. Średnia ta wzrosła do 24 lat, po doliczeniu wieku przewodnika, który dołączył do wycieczki w Zakopanem. Ile lat miał przewodnik?

4. Geometria płaska – pojęcia wstępne

Tematyka zajęć:

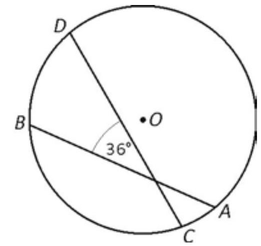
- Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona
- Łamana. Wielokąt. Wielokąt foremny
- Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta
- Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w wielokącie
- **(R) Wektor na płaszczyźnie (bez układu współrzędnych)**
- **(R) Wybrane przekształcenia płaszczyzny, cz.1**
- **(R) Wybrane przekształcenia płaszczyzny, cz.2**
- Twierdzenie Talesa
- Okrąg i koło
- Kąty i koła

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna figury podstawowe (punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń) i potrafi zapisać relacje między nimi; – zna pojęcie figury wypukłej i wklęsłej; potrafi podać przykłady takich figur; – zna pojęcie figury ograniczonej i figury nieograniczonej, potrafi podać przykłady takich figur; – umie określić położenie prostych na płaszczyźnie; – rozumie pojęcie odległości, umie wyznaczyć odległość dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych; – zna określenie kąta i podział kątów ze względu na ich miarę; – zna pojęcie kątów przyległych i kątów	Uczeń: – potrafi zapisać miarę stopniową kąta, używając minut i sekund; – zna pojęcie łamanej, łamanej zwyczajnej, łamanej zwyczajnej zamkniętej; – zna definicję wielokąta; – zna i potrafi stosować wzór na liczbę przekątnych wielokąta; – wie, jaki wielokąt nazywamy foremnym; – potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące sumy miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego; – potrafi udowodnić, że suma miar kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego jest stała; – zna definicję wektora na płaszczyźnie (bez układu współrzędnych); – wie, jakie wektory są równe, a jakie przeciwne; – potrafi wektory dodawać, odejmować i mnożyć	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i kół, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń; – zna i potrafi udowodnić twierdzenie o dwusiecznych kątów przyległych; – umie udowodnić twierdzenia o kątach środkowych i wpisanych w koło; – umie udowodnić twierdzenie o kącie dopisanym do okręgu; – umie udowodnić własności figur geometrycznych w oparciu o poznane twierdzenia.

wierzchołkowych oraz potrafi zastosować własności tych kątów w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna pojęcie dwusiecznej kąta i symetralnej odcinka, potrafi zastosować własność dwusiecznej kąta oraz symetralnej odcinka w rozwiązywaniu prostych zadań, – umie skonstruować dwusieczną danego kąta i symetralną danego odcinka; – zna własności kątów utworzonych między dwiema prostymi równoległymi, przeciętymi trzecią prostą i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; potrafi uzasadnić równoległość dwóch prostych, znajdując równe kąty odpowiadające; – zna twierdzenie Talesa; potrafi je stosować do podziału odcinka w danym stosunku, do konstrukcji odcinka o danej długości, do obliczania długości odcinka w prostych zadaniach; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa i potrafi je stosować do uzasadnienia równoległości odpowiednich odcinków lub prostych; – zna wnioski z twierdzenia Talesa i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna definicję koła i okręgu, poprawnie posługuje się terminami: promień, środek okręgu, cięciwa, średnica, łuk okręgu; – potrafi określić wzajemne położenie prostej i okręgu; – zna definicję stycznej do okręgu; – zna twierdzenie o stycznej do okręgu i potrafi je wykorzystywać przy rozwiązywaniu prostych	przez liczbę; – zna prawa dotyczące działań na wektorach; – potrafi stosować wiedzę o wektorach w rozwiązywaniu zadań geometrycznych; – zna definicję przekształcenia geometrycznego; – wie, co to jest punkt stały przekształcenia geometrycznego; – wie, jakie przekształcenie geometryczne jest tożsamościowe; – wie, jakie przekształcenie geometryczne jest izometrią; – zna definicje i własności takich przekształceń izometrycznych, jak: przesunięcie równoległe o wektor, symetria osiowa względem prostej, symetria środkowa względem punktu; – wie, co to jest oś symetrii figury (figura osiowosymetryczna); – wie, co to jest środek symetrii figury (figura środkowosymetryczna); zna przekształcenia nieizometryczne – rzut równoległy na prostą oraz powinowactwo prostokątne; – potrafi skonstruować styczną do okręgu, przechodzącą przez punkt leżący w odległości większej od środka okręgu niż długość promienia okręgu; potrafi skonstruować styczną do okręgu przechodzącą przez punkt leżący na okręgu; – wie, co to jest kąt dopisany do okręgu; zna twierdzenie o kątach wpisanym i dopisanym do okręgu, opartych na tym samym łuku; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów, stycznych, kątów środkowych, wpisanych i dopisanych, z zastosowaniem poznanych twierdzeń;	

zadań; – zna twierdzenie o odcinkach stycznych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – umie określić wzajemne położenie dwóch okręgów; – posługuje się terminami: kąt wpisany w koło, kąt środkowy koła; zna twierdzenia dotyczące kątów wpisanych i środkowych i umie je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań.	– potrafi rozwiązywać zadania złożone, wymagające wykorzystania równocześnie kilku poznanych własności.	

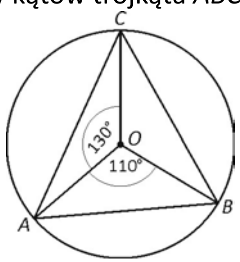
Przykładowe zadania

Zadanie 1. Punkt *C* dzieli odcinek *AB* długości 24 cm na dwa odcinki, których stosunek długości jest równy 6 : 2. Jaka jest długość każdego z odcinków? Zadanie 2. Różnica miar dwóch kątów przyległych wynosi 21°. Oblicz miary tych kątów. Zadanie 3. Na płaszczyźnie dane są punkty: *A*, *B*, *P*, *Q*, przy czym $A \neq B$, $\|AP\| = \sqrt{12}$ cm, $\|BP\| = 3\sqrt{2}$ cm, $\|AQ\| = \frac{49}{9}$ cm, $\|BQ\| = 5,(4)$ cm. Sprawdź, czy punkty *P*, *Q* należą do symetralnej odcinka *AB*. Z jakiej własności symetralnej skorzystasz? Zadanie 4. Dany jest odcinek długości *a*. Podziel ten odcinek: a) na 5 odcinków równej długości; b) w stosunku 2 : 7.	Zadanie 1. W sześciokącie foremnym ABCDEF dane są: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Wyraź wektory $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CF}$ za pomocą wektorów $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$. Zadanie 2. Wykaż, korzystając z działań na wektorach, że symetria środkowa jest izometrią. Zadanie 3. Cięciwy *AB* i *CD* przecinają się pod kątem 36°. Wyznacz kąty środkowe, odpowiadające łukom *AC* i *BD*, jeżeli stosunek ich długości wynosi 1 : 3.  Zadanie 4.	Zadanie 1. Uzasadnij, korzystając z wiadomości o wektorach, że odcinek łączący środki przekątnych dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw. Zadanie 2. Wykaż, że prawdziwe jest twierdzenie: Jeśli istnieje okrąg, który jest styczny do wszystkich boków czworokąta wypukłego, to sumy długości dwóch przeciwległych boków tego czworokąta są sobie równe. Zadanie 3. Wykaż, że jeśli przez wszystkie wierzchołki czworokąta wypukłego można poprowadzić okrąg, to sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe 180°.

Zadanie 5.
W trapezie $ABCD$, $AB \parallel CD$, mamy dane:
$|AB| = 12$ cm, $|CD| = 7$ cm, $|AD| = 8$ cm. O ile należy wydłużyć ramię AD, aby przecięło się z przedłużeniem ramienia BC?

Zadanie 6.
Miara kąta utworzonego przez dwa promienie okręgu wynosi $146°$. Oblicz miarę kąta, który tworzą styczne poprowadzone przez końce tych promieni.

Zadanie 7.
Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.



Zadanie 8.
Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu 2 oraz prosta k, której odległość od punktu O jest równa $4a - 3$.

Wyznacz a tak, aby prosta k była:

a) styczną do okręgu $o(O, 2)$;

b) sieczną okręgu $o(O, 2)$;

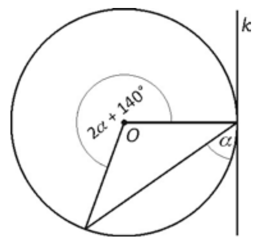
c) rozłączna z okręgiem $o(O, 2)$.

Do danego okręgu poprowadzono styczną tak, że końce A i B średnicy AB tego okręgu są odległe od stycznej o 25 cm i 15 cm. Oblicz długość średnicy AB.

Zadanie 5.
Kąty AOC i BOD są kątami wierzchołkowymi. Wykaż, że przedłużenie dwusiecznej kąta AOC jest dwusieczną kąta BOD.

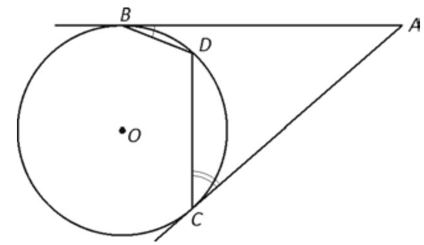
Zadanie 6.
W trójkącie ABC poprowadzono trzy proste równoległe do podstawy AB, dzielące bok BC na cztery odcinki równej długości. Suma długości odcinków tych prostych zawartych w trójkącie ABC jest o 6 dm większa od długości podstawy AB. Oblicz $|AB|$.

Zadanie 7.
Prosta k jest styczna do okręgu. Oblicz miarę kąta α dopisanego do okręgu:



Zadanie 8.
Dane są dwa okręgi $o(A, r_1)$, $o(B, r_2)$ takie, że $r_1 = 3k + 1$, $r_2 = 2k + 3$, $|AB| = 6k - 3$. Określ położenie okręgów, w zależności od parametru k.

Zadanie 4.
Punkt D leży na łuku BC wewnątrz trójkąta ABC. Wykaż, że suma $|\angle ABD| + |\angle ACD|$ jest stała (tzn. nie zależy od położenia punktu D na łuku BC). Czy teza zadania będzie prawdziwa, jeśli punkt D będzie leżał na łuku BC na zewnątrz trójkąta ABC?



	<u>Zadanie 9.</u> Z punktu zewnętrznego *A* poprowadzono styczne *AB* i *AC* do okręgu o środku w punkcie *O* (*B*, *C* – punkty styczności). Wykaż, że jeśli miara kąta między stycznymi równa się mierze kąta zawartego między promieniami poprowadzonymi ze środka koła do punktów styczności, to czworokąt *ABOC* jest kwadratem.	

5. Geometria płaska – trójkąty

Tematyka zajęć:

- Podział trójkątów. Suma kątów w trójkącie. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki dwóch boków w trójkącie
- Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa
- Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie
- Symetralne boków trójkąta. Okrąg opisany na trójkącie
- Dwusieczne kątów trójkąta. Okrąg wpisany w trójkąt
- Przystawanie trójkątów
- Podobieństwo trójkątów
- **(R) Twierdzenie o stycznej i siecznej**

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział trójkątów ze względu na boki i kąty; – wie, ile wynosi suma miar kątów w trójkącie i w czworokącie; – zna warunek na długość odcinków, z których można zbudować trójkąt; – zna twierdzenie dotyczące odcinka łączącego środki dwóch boków trójkąta i potrafi je	Uczeń: – zna zależności między bokami w trójkącie (nierówności trójkąta) i stosuje je przy rozwiązywaniu zadań; – potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie; – zna i umie zastosować w zadaniach własność wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną;	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczących trójkątów, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń; – potrafi udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie; – potrafi udowodnić twierdzenie dotyczące wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej na przeciwprostokątną.

zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie Pitagorasa i umie je zastosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i wykorzystuje je do sprawdzenia, czy dany trójkąt jest prostokątny; – umie określić na podstawie długości boków trójkąta, czy trójkąt jest ostrokątny, czy rozwartokątny; – umie narysować wysokości w trójkącie i wie, że wysokości (lub ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie; – zna twierdzenie o środkowych w trójkącie oraz potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna pojęcie środka ciężkości trójkąta; – zna twierdzenie o symetralnych boków w trójkącie; – wie, że punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – wie, że punkt przecięcia się dwusiecznych kątów w trójkącie jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt i potrafi skonstruować ten okrąg; – zna i stosuje przy rozwiązywaniu prostych zadań własności trójkąta równobocznego: długość wysokości w zależności od długości boku, długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; – zna i stosuje własności trójkąta prostokątnego:	– potrafi obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny i długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym, mając dane długości boków trójkąta; – potrafi udowodnić proste własności trójkątów, wykorzystując cechy przystawania trójkątów; – potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka; – potrafi uzasadnić, że każdy punkt należący do dwusiecznej kąta leży w równej odległości od ramion tego kąta; – potrafi udowodnić twierdzenie o symetralnych boków i twierdzenie o dwusiecznych kątów w trójkącie; – umie udowodnić twierdzenie o odcinkach stycznych; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i okręgów opisanych na trójkącie; – potrafi stosować cechy podobieństwa trójkątów do rozwiązania zadań z wykorzystaniem innych, wcześniej poznanych własności; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące trójkątów, z zastosowaniem poznanych do tej pory twierdzeń; – zna twierdzenie o stycznej i siecznej oraz potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań geometrycznych.	– potrafi udowodnić twierdzenie o stycznej i siecznej.

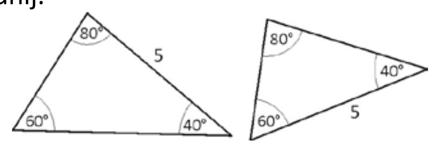
suma miar kątów ostrych trójkąta, długość wysokości w trójkącie prostokątnym równoramiennym w zależności od długości przyprostokątnej; długość promienia okręgu opisanego na trójkącie i długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt w zależności od długości boków trójkąta, zależność między długością środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego a długością przeciwprostokątnej; – zna podstawowe własności trójkąta równoramiennego i stosuje je przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna trzy cechy przystawania trójkątów i potrafi je zastosować przy rozwiązywaniu prostych zadań; – zna cechy podobieństwa trójkątów; potrafi je stosować do rozpoznawania trójkątów podobnych i przy rozwiązaniach prostych zadań; – umie obliczyć skalę podobieństwa trójkątów podobnych.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie jest dwa razy większy niż kąt przy wierzchołku. Wyznacz kąty tego trójkąta. <u>Zadanie 2.</u> Wielkość telewizora wyraża się długością przekątnej ekranu mierzonej w calach (1 cal = = 2,54 cm). Oblicz, ile cali ma telewizor, którego wymiary ekranu wynoszą 42 cm na 31,5 cm. Wynik podaj z dokładnością do 1 cala.	<u>Zadanie 1.</u> Dwa boki trójkąta mają długość 1 cm i 4 cm. Oblicz obwód tego trójkąta, jeżeli wiadomo, że długość trzeciego boku wyraża się liczbą naturalną. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie prostokątnym ABC przedłużono przeciwprostokątną AB i obrano na przedłużeniach punkty D i E tak, że $\|AD\| = \|AC\|$ oraz $\|BE\| = \|BC\|$. Oblicz miarę kąta DCE.	<u>Zadanie 1.</u> Wykaż, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków czworokąta jest większa od połowy obwodu tego czworokąta. <u>Zadanie 2.</u> W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa odcinkowi, który łączy środek podstawy ze środkiem ramienia. Podstawa trójkąta ma długość a. Jaką długość ma wysokość opuszczona na podstawę?

Zadanie 3.
Dane są odcinki długości a, b oraz c. Skonstruuj odcinek długości: $\frac{\sqrt{3}ac}{\sqrt{2}b}$.

Zadanie 4.
Czy poniższe trójkąty są przystające? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie 5.
W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 10$ cm. Punkt D dzieli bok AB na takie dwa odcinki, że $|AD| : |DB| = 3 : 5$. Przez punkt D poprowadzono prostą równoległą do boku AC, która przecięła bok BC w punkcie E. Oblicz długości odcinków: CE, BE i DE.

Zadanie 6.
W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona na przeciwprostokątną ma długość 4 cm. Spodek tej wysokości leży w odległości $1\frac{1}{6}$ cm od środka okręgu opisanego na trójkącie. Oblicz:
a) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie;
b) długość boków tego trójkąta.

Zadanie 7.
W trójkąt prostokątny równoramienny wpisano

Zadanie 3.
W trójkącie boki mają długość: 17 cm, 25 cm, 28 cm.
a) Sprawdź, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.
b) Oblicz długość wysokości poprowadzonej na najdłuższy bok.
c) Podaj długość odcinków, na jakie spodek wysokości podzielił najdłuższy bok trójkąta.

Zadanie 4.
Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczne kątów przy podstawie są równej długości.

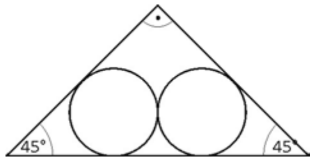
Zadanie 5.
W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długość: $|AB| = 32$ cm, $|AC| = 24$ cm. Symetralna boku BC przecina ten bok w punkcie D, bok AB w punkcie E i przedłużenie boku AC w punkcie F. Udowodnij, że trójkąt EBD jest podobny do trójkąta EAF i oblicz skalę tego podobieństwa.

Zadanie 6.
Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkty P, Q, R leżą na bokach trójkąta ABC (po jednym na każdym boku) w taki sposób, że każdy bok trójkąta PQR jest prostopadły do jednego boku trójkąta ABC.
a) Wykaż, że trójkąt PQR jest równoboczny.
b) Wyznacz stosunek $\frac{|AB|}{|PQ|}$.

Zadanie 3.
Niech a, b, c będą długościami boków w dowolnym trójkącie. Wykaż, że prawdziwa jest nierówność: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Zadanie 4.
Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = |AC|$ oraz $|\angle ABC| = 3|\angle BAC|$. Wykaż, że jeżeli półproste $\overrightarrow{BK}$ i $\overrightarrow{BL}$ dzielą kąt $\angle ABC$ na trzy równe części ($|\angle LBC| = \frac{1}{3}|\angle ABC|$), to trójkąty BCL, BCK, BKA są równoramienne.

Zadanie 5.
Okręgi o promieniach długości 2 cm i 3 cm są styczne zewnętrznie w punkcie A. Znajdź odległość punktu A od prostej, do której nie należy punkt A, a która jest styczna jednocześnie do obu okręgów.

dwa okręgi, styczne zewnętrznie do siebie, każdy o promieniu 1 cm (jak na rysunku poniżej).  Oblicz obwód tego trójkąta.	<u>Zadanie 7.</u> Dany jest okrąg o promieniu 3. Z punktu *P* oddalonego od środka okręgu o 5 poprowadzono styczną do okręgu oraz sieczną przecinającą okrąg w punktach *A* i *B* tak, że $\|BP\| : \|AP\| = 3 : 2$. Oblicz długość odcinka *AB*.	

6. Trygonometria

Tematyka zajęć:

- Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym
- Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów 30°, 45°, 60°
- Kąt skierowany
- Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta
- Podstawowe tożsamości trygonometryczne
- Wzory redukcyjne
- **(R) Twierdzenie sinusów**
- **(R) Twierdzenie cosinusów**

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym o danych długościach boków; – potrafi korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); – zna wartości funkcji trygonometrycznych	Uczeń: – zna pojęcie kąta skierowanego; – wie, co to jest miara główna kąta skierowanego i potrafi ją wyznaczyć dla dowolnego kąta; – zna definicje sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dowolnego kata; – umie podać znaki wartości funkcji trygono-	Uczeń: – potrafi udowodnić twierdzenie sinusów; – potrafi udowodnić twierdzenie cosinusów; – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod.

kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne; – potrafi obliczać wartości wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne kątów o miarach 30°, 45°, 60°; – zna definicje sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dowolnego kata wypukłego; – potrafi wyznaczyć (korzystając z definicji) wartości funkcji trygonometrycznych takich kątów wypukłych, jak: 120°,135°, 150°; – zna znaki funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych, różnych od 90°; zna wartości funkcji trygonometrycznych (o ile istnieją) kątów o miarach: 0°, 90°, 180°; – potrafi obliczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta wypukłego, gdy dana jest jedna z nich; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (w odniesieniu do kąta wypukłego): $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; – zna wzory redukcyjne dla kąta $90^\circ - \alpha$, $90^\circ + \alpha$ oraz $180^\circ - \alpha$; – potrafi stosować poznane wzory redukcyjne w obliczaniu wartości wyrażeń; – potrafi zastosować poznane wzory redukcyjne w zadaniach geometrycznych; – potrafi zbudować kąt wypukły znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.	metrycznych w poszczególnych ćwiartkach; – potrafi obliczyć, na podstawie definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 210°, 240°, 315°, 330° itd.; – umie zbudować w układzie współrzędnych dowolny kąt o mierze α, gdy dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej tego kąta; – zna i potrafi stosować podstawowe tożsamości trygonometryczne (dla dowolnego kąta, dla którego funkcje trygonometryczne są określone) – zna i potrafi stosować wzory redukcyjne; – potrafi dowodzić różne tożsamości trygono-metryczne; – zna twierdzenie sinusów i potrafi je stosować w zadaniach geometrycznych; – zna twierdzenie cosinusów i potrafi stosować je w zadaniach geometrycznych; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności, wykorzystując także wcześniej poznaną wiedzę o figurach geometrycznych.	

Przykładowe zadania

Zadanie 1.
Oblicz wartość wyrażenia:
$\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ$.

Zadanie 2.
W trójkącie prostokątnym *ABC* dane są: długość przeciwprostokątnej $|BC| = \sqrt{146}$ cm oraz długość przyprostokątnej $|AB| = 5$ cm.
a) Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.
b) Oblicz miary kątów ostrych trójkąta (skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych).
c) Oblicz długość wysokości trójkąta poprowadzonej na przeciwprostokątną oraz cosinus kąta, jaki tworzy ta wysokość z krótszą przyprostokątną.

Zadanie 3.
Kąt wzniesienia wieży, zmierzony w odległości 80 m od jej podstawy, ma miarę 48°. Jaką wysokość ma wieża?

Zadanie 4.
Wyznacz, korzystając z definicji, wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°.

Zadanie 5.
Oblicz, stosując odpowiednie wzory redukcyjne, wartość wyrażenia:
a) $\sin 135^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 150^\circ$
b) $\sin^2 17^\circ + \sin^2 73^\circ - \cos 120^\circ$.

Zadanie 1.
Zbuduj kąt o mierze α takiej, że
a) $\sin \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ b) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{7}$.
Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α.

Zadanie 2.
Posługując się wzorem $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, oblicz $\sin 15^\circ$.

Zadanie 3.
W trójkącie prostokątnym *a*, *b* oznaczają długości przyprostokątnych, α jest miarą kąta leżącego naprzeciw przyprostokątnej długości *a*. Wiedząc, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$, oblicz:
a) tangens α;
b) wartość wyrażenia: $\frac{b}{a+b} + \frac{a^2}{a^2 - b^2}$.

Zadanie 4.
Sprawdź, czy równość
$\frac{\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}$ jest tożsamością trygonometryczną. Podaj konieczne założenia.

Zadanie 5.
Oblicz wartość wyrażenia:
$\sin 960^\circ \cdot \operatorname{tg} 420^\circ - \cos 1410^\circ$.

Zadanie 1.
Wiedząc, że
$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, oblicz:
a) $|\sin \alpha - \cos \alpha|$,
b) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$;
c) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$.

Zadanie 2.
Balon wznosi się pionowo. W chwili, gdy znajduje się na wysokości *h* metrów nad ziemią, osoba lecąca balonem mierzy kąt depresji α przedmiotu znajdującego się na ziemi. Po upływie *t* sekund powtarza pomiar i otrzymuje kąt β. Z jaką średnią prędkością *v* wznosi się balon?

Zadanie 3.
Wykaż, że jeśli *a*, *b*, *c* są długościami boków trójkąta oraz $a < \frac{b+c}{2}$, to miary kątów α, β, γ, leżących naprzeciw tych boków, spełniają nierówność $\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$.

Zadanie 6. Oblicz, bez użycia tablic i kalkulatora: tg 30° · tg 40° · tg 130°. Zadanie 7. Niech α, β, γ oznaczają miary kątów dowolnego trójkąta. Wykaż, że prawdziwa jest zależność: $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$. Zadanie 8. Zbuduj kąt o mierze α, $\alpha \in (90°, 180°)$ takiej, że a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ b) $\text{ctg}\,\alpha = -4$. Wyznacz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta α. Zadanie 9. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{5\sin\alpha - 4\cos\alpha}{3\cos\alpha + 8\sin\alpha}$ wiedząc, że $\text{tg}\,\alpha = \frac{2}{3}$.	Zadanie 6. Oblicz długość środkowej *CD* w trójkącie *ABC*, jeśli dane są długości boków trójkąta: $a = 5$, $b = 6$, $c = 10$. Zadanie 7. W trójkącie *ABC* dane są długości boków: $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{2}$, $c = 3 - \sqrt{3}$. Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta oraz promień koła opisanego na tym trójkącie. Zadanie 8. W pewnym trójkącie miary kątów α, β, γ spełniają warunek: $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin^2\gamma$. Wykaż, że trójkąt ten jest prostokątny.	

7. Geometria płaska – pole koła, pole trójkąta

Tematyka zajęć:

- Pole figury geometrycznej
- Pole trójkąta, cz. 1
- Pole trójkąta, cz. 2
- Pola trójkątów podobnych
- Pole koła, pole wycinka koła
- **(R) Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń**

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – rozumie pojęcie pola figury; zna wzór na pole kwadratu i pole prostokąta; – zna następujące wzory na pole trójkąta: $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, gdzie a – długość boku trójkąta równobocznego $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, $P = a \cdot b \cdot \sin \gamma$, gdzie $\gamma \in (0°, 180°)$ $P = \frac{abc}{4R}$, $P = \frac{1}{2} p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$ $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na pole trójkąta i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi obliczyć wysokość trójkąta, korzystając ze wzoru na pole; – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trójkątów, wykorzystując wzory na ich pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz własności okręgu wpisanego w trójkąt i okręgu opisanego na trójkącie; – zna twierdzenie o polach figur podobnych; potrafi je stosować przy rozwiązywaniu prostych	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzór na pole trójkąta równobocznego i wzory: $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$, $P = \frac{1}{2} p \cdot r$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$, ze wzoru $P = \frac{1}{2} a h_a$; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, stosując wzory na pola trójkątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej własności trójkątów; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne, wykorzystując cechy podobieństwa trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych; – rozwiązuje zadania dotyczące trójkątów, w których wykorzystuje twierdzenia poznane wcześniej (tw. Pitagorasa, tw. Talesa, – tw. sinusów, tw. cosinusów, twierdzenia o kątach w kole, itp.) – potrafi dowodzić twierdzenia, w których wykorzystuje pojęcie pola.	Uczeń: – potrafi udowodnić twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie Talesa z wykorzystaniem pól odpowiednich trójkątów; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń.

zadań; – zna wzór na pole koła i pole wycinka koła; umie zastosować te wzory przy rozwiązywaniu prostych zadań; – wie, że pole wycinka koła jest wprost proporcjonalne do miary odpowiadającego mu kąta środkowego koła i jest wprost proporcjonalne do długości odpowiadającego mu łuku okręgu oraz umie zastosować tę wiedzę przy rozwiązywaniu prostych zadań.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Z kawałka trójkątnego materiału o obwodzie 1,12 m i polu 504 cm^2 wycięto koło, styczne do boków tego trójkąta. Oblicz długość promienia wyciętego koła. Zadanie 2. Boki trójkąta mają długość 21 cm, 17 cm, 10 cm. Oblicz: a) pole trójkąta; b) długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; c) długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Zadanie 3. W trójkącie dwa boki mają długość 12 cm i 10 cm, zaś kąt zawarty między tymi bokami ma miarę 150°. Oblicz pole tego trójkąta.	Zadanie 1. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz stosunek pola koła wpisanego w ten trójkąt do pola koła opisanego na tym trójkącie. Zadanie 2. W trójkącie, którego pole jest równe 27 cm^2, dwa boki mają długość 18 cm i 6 cm. a) Jaką miarę ma kąt zawarty między tymi bokami? b) Oblicz długość trzeciego boku trójkąta. c) Oblicz promień koła opisanego na tym trójkącie. Pamiętaj o rozważeniu dwóch przypadków. Zadanie 3. Na trójkącie ABC, w którym $\|AC\| = \|BC\|$, opisano okrąg o środku O i promieniu $R = 20$ cm. Wiedząc, że $\|\angle AOB\| = 120°$, oblicz pole trójkąta oraz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Rozważ dwa przypadki.	Zadanie 1. W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AD oraz CE, które przecięły się w punkcie M. Wiedząc, że $\|AD\| \cdot \|CE\| = \sqrt{3}$ oraz $\|\angle MAC\| + \|ACM\| = 60°$ wykaż, że pole trójkąta ABC wynosi 1. Zadanie 2. Wyznacz długość boku c trójkąta, jeśli dane są długości a, b dwóch jego boków oraz wiadomo, że $h_a + h_b = h_c$, gdzie h_a, h_b, h_c są długościami wysokości opuszczonych na odpowiednie boki tego trójkąta. Zadanie 3. Wykaż, że okrąg wpisany w trójkąt prostokątny jest styczny do przeciwprostokątnej w punkcie dzielącym ją na dwa odcinki, których iloczyn długości jest równy polu tego trójkąta.

Zadanie 4. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długość 6 cm i 8 cm. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta oblicz odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej. Zadanie 5. Kąt wpisany w koło ma miarę 45° i jest oparty na łuku długości 3π cm. Oblicz pole wycinka koła wyznaczonego przez ten łuk. Zadanie 6. Trójkąt równoboczny $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali $s = 3$. Pole trójkąta ABC jest równe $4\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz długość boku trójkąta $A'B'C'$.	Zadanie 4. W trójkącie równoramiennym podstawa ma 16 cm długości, a ramię ma 17 cm długości. Oblicz odległość środka wysokości poprowadzonej na podstawę trójkąta od ramienia trójkąta. Zadanie 5. Prosta równoległa do podstawy AB trójkąta ABC, przecinająca ramiona AC i BC odpowiednio w punktach D i E, dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. W jakim stosunku (licząc od wierzchołka C) dzieli ona ramiona trójkąta? Zadanie 6. W wycinek koła o promieniu 6 cm wpisano okrąg o promieniu 2 cm. Oblicz pole wycinka koła. Zadanie 7. W trójkącie ABC dane są: $\|\angle ACB\| = 120^\circ$, $\|AC\| = b$, $\|BC\| = a$. Wykaż, że odcinek dwusiecznej kąta ACB zawarty w trójkącie ma długość $\frac{a \cdot b}{a+b}$.	Zadanie 4. Wykaż, że pole trójkąta wyraża się wzorem: $P = \frac{abc}{4R}$, gdzie a, b, c oznaczają długości boków trójkąta, R – długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Zadanie 5. W trójkącie rozwartokątnym ABC (kąt BCA jest rozwarty) długości boków wynoszą: $\|AB\| = c$, $\|AC\| = b$ oraz $\|BC\| = a$, gdzie $0 < a < b < c$. Pole tego trójkąta wynosi 3. Wykaż, że $\|AC\| > \sqrt{6}$.

8. Funkcja i jej własności

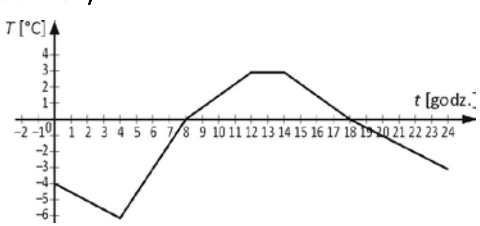
Tematyka zajęć:
- Pojęcie funkcji. Funkcja liczbowa. Dziedzina i zbiór wartości funkcji
- Sposoby opisywania funkcji
- Wykres funkcji
- Dziedzina funkcji liczbowej
- Zbiór wartości funkcji liczbowej
- Miejsce zerowe funkcji
- **(R) Równość funkcji**
- Monotoniczność funkcji
- Funkcje różnowartościowe
- **(R) Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste**
- **(R) Funkcje okresowe**
- **(R) Największa i najmniejsza wartość funkcji liczbowej**
- Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu
- Szkicowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach
- Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności.
- Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci wykresu funkcji

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi odróżnić funkcję od innych przyporządkowań; – potrafi podawać przykłady funkcji; – potrafi opisywać funkcje na różne sposoby: wzorem, tabelką, grafem, opisem słownym; – potrafi naszkicować wykres funkcji liczbowej określonej słownie, grafem, tabelką, wzorem;	Uczeń: – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunkcji warunków, dotyczących mianowników lub pierwiastków stopnia drugiego, występujących we wzorze; – potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji opisanej	Uczeń: – rozwiązuje zadania dotyczące funkcji o podwyższonym stopniu trudności.

– potrafi odróżnić wykres funkcji od krzywej, która wykresem funkcji nie jest; – zna wykresy funkcji, takich jak: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$; – potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem (w prostych przypadkach); – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej (w prostych przypadkach); – potrafi obliczyć wartość funkcji liczbowej dla danego argumentu, a także obliczyć argument funkcji, gdy dana jest jej wartość; – potrafi określić zbiór wartości funkcji w prostych przypadkach (np. w przypadku, gdy dziedzina funkcji jest zbiorem skończonym); – potrafi na podstawie wykresu funkcji liczbowej odczytać jej własności, takie jak: – dziedzina funkcji – zbiór wartości funkcji – miejsce zerowe funkcji – argument funkcji, gdy dana jest wartość funkcji – wartość funkcji dla danego argumentu – przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca, stała – zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, niedodatnie, nieujemne – najmniejszą oraz największą wartość funkcji; – potrafi interpretować informacje na podstawie wykresów funkcji lub ich wzorów (np. dotyczące różnych zjawisk przyrodniczych, ekonomicznych, socjologicznych, fizycznych); – potrafi przetwarzać informacje dane w postaci wzoru lub wykresu funkcji; – umie na podstawie wykresów funkcji *f* i *g*	wzorem; – wie, jakie funkcje nazywamy równymi; – zna definicję funkcji parzystej oraz nieparzystej; – wie, jaką funkcję nazywamy okresową; – potrafi podać własności funkcji okresowej na podstawie jej wykresu; – potrafi zbadać na podstawie definicji, czy dane funkcje są równe; – potrafi zbadać na podstawie definicji parzystość (nieparzystość) danej funkcji; – potrafi zbadać na podstawie definicji monotoniczność danej funkcji; – potrafi udowodnić na podstawie definicji różnowartościowość danej funkcji; – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji w przedziale domkniętym; – posługuje się wykresami funkcji: y = reszta z dzielenia x przez 3, gdzie $x \in \boldsymbol{C}$, $y = \operatorname{sgn} x$, $y = [x]$, $y = x - [x]$, $y = \max(5, \|x\|)$, $y = \min(x, 2x + 1)$; – potrafi stosować wiadomości o funkcji do opisywania zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym; – potrafi podać opis matematyczny prostej sytuacji w postaci wzoru funkcji; – potrafi naszkicować wykres funkcji kawałkami ciągłej na podstawie wzoru tej funkcji; – potrafi na podstawie wykresu funkcji kawałkami ciągłej omówić jej własności; – potrafi naszkicować wykres funkcji o zadanych własnościach.	

podać zbiór rozwiązań równania $f(x) = g(x)$ oraz nierówności typu: $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Dana jest funkcja określona za pomocą opisu słownego: *„Każdej liczbie ze zbioru* A = *{0, 1, 4, 9, 16} przyporządkowujemy pierwiastek kwadratowy tej liczby”.* Zapisz tę funkcję za pomocą wzoru, a następnie naszkicuj jej wykres w prostokątnym układzie współrzędnych. Podaj zbiór wartości tej funkcji i jej miejsce zerowe. Zadanie 2. Dana jest funkcja o wzorze $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{-x}}$. a) Określ dziedzinę tej funkcji. b) Czy funkcja ta posiada miejsce zerowe? Odpowiedź uzasadnij. c) Oblicz wartość funkcji dla argumentu (–9). Zadanie 3. Poniżej podany jest dobowy wykres temperatury.  Odpowiedz na pytania: a) W jakich godzinach dokonywano pomiaru? b) W jakim przedziale mieszczą się zanotowane	Zadanie 1. a) Wyznacz dziedzinę funkcji danej wzorem $f(x) = \sqrt{3-2x} + \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x}$. b) Wyznacz miejsce zerowe funkcji o wzorze $f(x) = \frac{\lvert x+2 \rvert - 1}{x^2 - 1}$. Zadanie 2. Naszkicuj wykres funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -6, 6 \rangle$; zbiorem wartości jest przedział $\langle 1, +\infty)$; wykres funkcji jest symetryczny względem osi *OY*; funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -6, 0 \rangle$ oraz $f(0) = 4$. Czy istnieje tylko jedna taka funkcja? Zadanie 3. Naszkicuj wykres i omów własności funkcji określonej wzorem: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq -2 \\ x^3 & \text{dla } -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$ a) Oblicz wartość funkcji *f* dla argumentu $3\frac{3}{8}$. b) Dla jakiego dodatniego argumentu *a* zachodzi równość $f(a) = -f(-a)$? Zadanie 4. W pewnym kraju obowiązuje system podatkowy	Zadanie 1. Przedstaw funkcję określoną wzorem $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x-3}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R} - \{-3, 3\}$, w postaci sumy funkcji parzystej i nieparzystej. Zadanie 2. Wykaż, że funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ przyjmuje największą wartość równą 4, a najmniejszą równą 2. Zadanie 3 Wykaż, że funkcja określona wzorem $f(x) = 3 - 2x^3$ jest a) malejąca, b) różnowartościowa.

temperatury?
c) W jakich godzinach temperatura wyniosła 0°?
d) W jakich godzinach temperatura była dodatnia, a w jakich ujemna?
e) W jakich godzinach temperatura rosła, a w jakich malała?
f) Jaką wartość miała temperatura w godzinach $\langle 12, 14\rangle$?
g) Jaką najniższą wartość wskazał termograf?

Zadanie 4.
Odległość d [km] ustalonego kolarza peletonu od mety w zależności od czasu jazdy t [h] (od chwili rozpoczęcia wyścigu do chwili przejechania mety) opisuje wzór:
$d(t) = 180 - 45t$.
a) Ile godzin potrzeba, aby kolarz przejechał linię mety wyścigu?
b) W jakiej odległości od mety będzie znajdował się kolarz po 40 minutach jazdy?
c) Po jakim czasie od startu kolarz będzie znajdował się 30 km od mety?
d) Jaką długość ma etap wyścigu?

Zadanie 5.
Na podstawie wykresów odpowiednich funkcji rozwiąż:
a) równanie $x^2 = x$
b) nierówność $\frac{1}{x} > x^3$.

opisany wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } 0 \le x \le 800 \\ 0{,}05x - 40 \text{ dla } 800 < x \le 2000 \\ 0{,}2x - 340 \text{ dla } x > 2000 \end{cases}$$

gdzie x – oznacza wysokość dochodów rocznych podatnika w dolarach, zaś $f(x)$ oznacza wysokość podatku, jaki zobowiązany jest zapłacić podatnik. Oblicz, który z podatników zapłaci większy podatek i o ile procent większy, jeśli dochód roczny pierwszego z nich wyniósł 1260 USD, zaś drugiego 3480 USD. Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Zadanie 5.
Wykaż na podstawie definicji, że funkcja określona wzorem:
a) $f(x) = x^2 - 2x$ jest rosnąca w zbiorze $(1, +\infty)$;
b) $f(x)= \frac{x-1}{x+4}$ jest różnowartościowa;
c) $f(x) = \frac{4x^4 - 5x^2}{x^2 - 1}$ jest parzysta.

Zadanie 6.
Wyznacz najmniejszą oraz największą wartość funkcji $f(x) = (2x - 3)^2$ w przedziale $\langle -4, 6\rangle$.

9. Przekształcenia wykresów funkcji

Tematyka zajęć:

- Podstawowe informacje o wektorze w układzie współrzędnych
- Przesunięcie równoległe o wektor $\vec{u}$ = [*p*, *q*]
- Symetria osiowa względem osi *OX* i osi *OY*
- Symetria środkowa względem punktu (0, 0)
- **(R) Wykres funkcji $y = |f(x)|$ oraz $y = f(|x|)$**
- **(R) Powinowactwo prostokątne o osi *OX* i o osi *OY***
- **(R) Szkicowanie wykresów wybranych funkcji**
- **(R) Zastosowanie wykresów funkcji do rozwiązywania zadań**

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna określenie wektora i potrafi podać jego cechy; – potrafi obliczyć współrzędne wektora, mając dane współrzędne początku i końca wektora; – potrafi obliczyć współrzędne początku wektora (końca wektora), gdy dane ma współrzędne wektora oraz współrzędne końca (początku) wektora; – potrafi wyznaczyć długość wektora (odległość między punktami na płaszczyźnie kartezjańskiej); – zna określenie wektorów równych i wektorów przeciwnych oraz potrafi stosować własności tych wektorów przy rozwiązywaniu zadań; – potrafi wykonywać działania na wektorach: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie przez liczbę (analitycznie); – potrafi obliczyć współrzędne środka odcinka;	Uczeń: – zna własności działań na wektorach i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ sporządzić wykresy funkcji: $y = \|f(x)\|$, $y = f(\|x\|)$, $y = k \cdot f(x)$, $k \neq 0$ oraz $y = f(k \cdot x)$, $k \neq 0$; – potrafi naszkicować wykres funkcji, którego sporządzenie wymaga kilku poznanych przekształceń; – potrafi przeprowadzić dyskusję rozwiązań równania z parametrem $f(x) = m$, w oparciu o wykres funkcji *f*; – potrafi stosować własności przekształceń geometrycznych przy rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania (o podwyższonym stopniu trudności), dotyczące przekształceń wykresów funkcji oraz własności funkcji.

– potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii osiowej względem osi *OX* oraz osi *OY*; – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii środkowej względem punktu (0,0); – potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w przesunięciu równoległym o dany wektor; – potrafi narysować wykres funkcji $y = f(x) + q$, $y = f(x - p)$, $y = f(x - p) + q$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$ oraz $y = -f(-x)$ w przypadku, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$; (potrafi narysować wykresy funkcji określonych wzorami, np.: $y = (x + 3)^2$; $y = \sqrt{x} - 4$; $y = -\frac{1}{x}$; $y = (x - 1)^2 - 5$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = \frac{1}{x-2} + 3$); – – umie podać własności funkcji: $y = f(x) + q$, $y = f(x - p)$, $y = f(x - p) + q$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, – $y = -f(-x)$ w oparciu o dane własności funkcji $y = f(x)$; – potrafi zapisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji *f* przez symetrię osiową względem osi *OX*, symetrię osiową względem osi *OY*, symetrię środkową względem początku układu współrzędnych, przesunięcie równoległe o dany wektor.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Dane są punkty: $A(2, 5)$, $B(-4, 6)$.	Zadanie 1. Dany jest odcinek o końcach $A(2, -5)$, $B(-4, 7)$. Wyznacz współrzędne punktu *P*, który dzieli odci-	Zadanie 1. W jaki sposób przekształcić wykres funkcji

a) Wyznacz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$.

b) Oblicz długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

c) Wyznacz współrzędne środka odcinka AB.

Zadanie 2.

Dane są wektory: $\vec{a} = [1, -1]$, $\vec{b} = [2, -1]$, $\vec{c} = [-5, -7]$. Wyznacz takie liczby rzeczywiste k, l, aby $k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} = \vec{c}$.

Zadanie 3.

W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj odcinek AB, gdzie $A(-2, 4)$, $B(-5, -3)$, a następnie wyznacz współrzędne końców obrazu tego odcinka:

a) w symetrii względem osi OX

b) w symetrii względem osi OY

c) w symetrii względem początku układu współrzędnych

d) w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [1, -3]$.

Zadanie 4.

Dana jest funkcja $f(x) = x^3$. Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = x^3 + 2$; b) $y = (x+1)^3$; c) $y = -x^3$;

d) $y = (x-1)^3 - 4$.

Zadanie 5.

Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.

nek AB w taki sposób, że $\frac{|PB|}{|AB|} = \frac{1}{3}$.

Zadanie 2.

O jaki wektor należy przesunąć równolegle wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 3$, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $g(x) = \sqrt{x} + 1$

b) $h(x) = \sqrt{x+2}$?

Zadanie 3.

Dana jest funkcja $g(x) = 2x - 6$. Jej wykres powstał w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych. Wyznacz wzór funkcji f.

Zadanie 4.

Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ naszkicuj wykresy funkcji:

a) $y = 3 - \sqrt{x+2}$

b) $y = \sqrt{-x+2} + 1$

c) $y = |\sqrt{x} - 4|$

d) $y = \frac{1}{4}\sqrt{|x|}$

Zadanie 5.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x-2|$. Na podstawie wykresu tej funkcji rozwiąż:

a) równania: $|x-2| = 3$; $|x-2| = x$

b) nierówności: $|x-2| \le 2$; $|x-2| > x^2$.

Zadanie 6.

$f(x) = \frac{1}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{4x-3} + 2$?

Zadanie 2.

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x} - 1$, a następnie na jego podstawie, sporządź wykres funkcji $g(x) = 4 - f(|-x+1|)$. Podaj wzór funkcji g.

Zadanie 3.

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \frac{2}{|x|-1}$,

a następnie:

a) podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji g

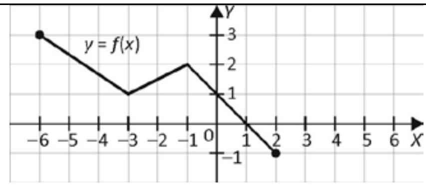
b) podaj przedziały monotoniczności funkcji g

c) wykaż, że funkcja g jest parzysta

d) podaj zbiór rozwiązań nierówności $\frac{2}{|x|-1} \ge |x|$.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $|3 - |x-2|| = m + 7$ ma więcej rozwiązań dodatnich niż ujemnych.

 a) Napisz wzór funkcji *g*, której wykres powstanie w wyniku przesunięcia wykresu funkcji *f* wzdłuż osi *OX* o 4 jednostki w prawo. Jakie miejsca zerowe ma funkcja *g*? b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji *h*, której wykres otrzymamy w wyniku przekształcenia wykresu funkcji *f* w symetrii względem osi *OX*.	Funkcja $y = f(x)$ jest określona w zbiorze ***R*** i jest okresowa o okresie podstawowym równym 6. Wyznacz okres podstawowy funkcji $g(x) = f(\frac{2}{3}x)$. <u>Zadanie 7.</u> W oparciu o wykres odpowiedniej funkcji podaj liczbę rozwiązań równania, w zależności od wartości parametru *m*: a) $\lvert x-5\rvert - 2 = m$ b) $\left\lvert \frac{1}{x} - 2 \right\rvert = m + 4$.	